
SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. BOVE

CARATTERISTICHE E BI-CARATTERISTICHE

27 NOVEMBRE 1986

Scopo di questo seminario è di elencare qualche risultato sulla geometria delle bicaratteristiche per operatori iperbolicici a caratteristiche doppie. Per una tale classe di operatori i risultati di buona posizione del problema di Cauchy e di propagazione delle singolarità vengono ricavati utilizzando stime a priori che sono molto sensibili alla geometria dell'operatore; è quindi interessante sapere se, "a livello di curve bicaratteristiche", vi è interazione tra la parte "semplice" della varietà caratteristica e quella "doppia".

Nel seguito considereremo un simbolo omogeneo di grado due nelle variabili $(x, \xi) \in T^* \mathbb{R}^n \setminus 0$, $x = (x_0, x')$, $x' = (x_1, \dots, x_n)$, del tipo

$$(1) \quad p(x, \xi) = -\xi_0^2 + a_1(x, \xi')\xi_0 + a_2(x, \xi'),$$

definito per $(x, \xi) \in T^*\Omega$, Ω aperto di \mathbb{R}^{n+1} , iperbolico rispetto a ξ_0 , ossia

$$(2) \quad 4a_2(x, \xi') + a_1^2(x, \xi') \geq 0.$$

Porremo $\Sigma_1 = \{p=0, dp \neq 0\}$, $\Sigma_2 = \{p=0, dp=0\}$, $H_p = \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi}$. Le curve bicaratteristiche sono le curve integrali di H_p : $\dot{\gamma}(t) = H_p(\gamma(t))$, $t \rightarrow \gamma(t) \in T^*\Omega$.

E' quindi ovvio che i problemi sorgono dai punti stazionari del campo vettoriale H_p , ossia dai punti di Σ_2 . In tali punti è definito in modo invariante $dH_p(\rho)$, $\rho \in \Sigma_2$, la cui matrice viene chiamata matrice fondamentale o hamiltoniana e denotata con $F_p(\rho)$.

L'analisi di $F_p(\rho)$, $\rho \in \Sigma_2$, dà luogo a una sorta di classificazione che ha conseguenze anche a livello di buona posizione del problema di Cauchy e di propagazione delle singolarità. Vale il teorema

Teorema 1.[3]. Esistono al più due autovalori reali di F_p (in un punto $\rho \in \Sigma_2$), $\pm \lambda$, $\lambda > 0$, e si ha $\text{sp}(F_p(\rho)) \subset i\mathbb{R} \cup \{+\lambda, -\lambda\}$. Inoltre esiste una trasformazione simplettica di $T^*\Omega$ che muta la forma quadratica

$\sigma(z, F_p(\rho)z)$, $z \in T_p T^*\Omega$ in una delle seguenti forme quadratiche

$$a) \quad \sum_{j=1}^k \mu_j (y_j^2 + \eta_j^2) + \sum_{j=k+1}^{k+l} \eta_j^2 + y_{n+1}^2 - 2\eta_n \eta_{n+1} \quad (k+l < n),$$

$$b) \quad \sum_{j=1}^k \mu_j (y_j^2 + \eta_j^2) + \sum_{j=k+1}^{k+l} \eta_j^2 - \eta_{n+1}^2 \quad (k+l < n+1)$$

$$c) \quad \sum_{j=1}^k \mu_j (y_j^2 + \eta_j^2) + \sum_{j=k+1}^{k+l} \eta_j^2 + 2\lambda y_{n+1} \eta_{n+1} \quad (k+l < n+1)$$

ove $\mu_j > 0$, $j=1, \dots, k$, $\lambda > 0$. I casi a), b), c) si escludono a vicenda [3].

In seguito supporremo anche che Σ_2 sia una varietà C^∞ di $T^*\Omega$.

Vale il seguente risultato:

Teorema 2. [4]. Supponiamo che p si possa scrivere nel modo seguente:

$$(3) \quad p(x, \xi) = -\Lambda(x, \xi)M(x, \xi) + q(x, \xi),$$

ove

$$\Lambda(x, \xi) = \xi_0^{-\lambda}(x, \xi'), \quad M(x, \xi) = \xi_0^{-\mu}(x, \xi'), \quad \lambda, \mu \in S_{cl}^1, \quad q \geq 0, \quad q \in S_{cl}^2, \quad \text{per cui}$$

$$(4) \quad \{\Lambda, q\} \lesssim \sqrt{q}$$

$$(5) \quad |\{\Lambda, M\}| \lesssim q + |\Lambda - M|.$$

Indichiamo con Γ un aperto conico della forma $\Gamma = \{(x, \xi) \in T^*\Omega \mid (x_0, x', \xi') \in Ix\Gamma', \xi_0 \in R\}$. Allora

- 1) Se $\gamma \subset \Gamma$ è una curva integrale di H_Λ e $\gamma \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$ allora $\gamma \subset \Sigma_2$
- 2) Se $\rho_0 \in \Gamma \cap \Sigma_1$, γ_{ρ_0} è la curva integrale di H_p per ρ_0 , $\forall V \subset \subset \Gamma$, $\forall \exists \rho_0$, si ha

$$\text{dist}(\gamma_{\rho_0} \cap V, \Sigma_2) > 0.$$

Il teorema precedente è implicato da ipotesi geometriche:

Teorema 3. [4]. Supponiamo che, con le notazioni di sopra,

$$\text{TE)} \quad \rho \in \Sigma_2 \Rightarrow \dim \ker F_p(\rho) = \dim \Sigma_2$$

$$\text{RI)} \quad \text{codim } \Sigma_2 = \text{cost.}$$

$$\text{R2)} \quad \sigma|_{T\Sigma_2} \text{ ha rango costante}$$

$$\text{SPL)} \quad \rho \in \Sigma_2 \Rightarrow \ker F_p^2(\rho) \cap \text{Im } F_p^2(\rho) = \{0\}$$

Allora p si può scrivere nella forma (3) con (4) e (5) verificate.

Teorema 4. [5]. Sia $\rho \in \Sigma_2$ un punto in cui vale la forma c) del teorema 1. Allora l'insieme delle curve integrali di H_p passanti per ρ è composto da due curve C^∞ che si incrociano trasversalmente in ρ .

Se V_\pm sono gli autovettori associati a $\pm \lambda \in \text{sp}(F_p(\rho))$ si ha che V_\pm sono tangenti in ρ alle due curve bicaratteristiche.

I teoremi 3 e 4 sono dunque esempi di due casi opposti: nel primo non vi sono bicaratteristiche che hanno punti limitati su Σ_2 , nel secondo vi sono solo due bicaratteristiche che tagliano Σ_2 in modo trasverso con direzione nota.

La situazione è meno precisa quando l'operatore è riconducibile alla forma a) del teorema 1. Si ha

Proposizione 5. ([2]). Valgono TE), RI), R2) del teorema 3. Inoltre

$$\text{II)} \quad \rho \in \Sigma_2 \Rightarrow \ker F_p^2(\rho) \cap \text{Im } F_p^2(\rho) \neq \{0\}.$$

Allora esiste una funzione $S(x, \xi)$ definita su un aperto Γ di $T^*\Omega$, $\Gamma \supset \Sigma_2$, tale che $0 \neq H_S(\rho) \in \ker F_p^2(\rho) \cap \text{Im } F_p^2(\rho)$, e una funzione $\Lambda(x, \xi)$ definita su Γ , per cui $H_\Lambda(\rho) = -F_p(\rho) H_S(\rho)$, $\rho \in \Sigma_2$ e tali che p si può scrivere nella for

ma (3) con (4) e (5) verificate se e solo se

$$(6) \quad \sigma(H_{\{S, \Lambda\}}(\rho)) \cap F_p(\rho) \cap H_{\{S, \Lambda\}}(\rho) = 0, \quad \rho \in \Sigma_2.$$

Osservazione. Non è difficile rendersi conto che la (6) è una condizione sul 3-jet di p vicino a Σ_2 .

Più precisamente si ha che (v. [2]) (6) equivale a:

$$(6') \quad i) \quad (H_S^3 p)(\rho) = 0$$

$$ii) \quad (H_\phi H_S^2 p)(\rho) = 0 \quad \forall H_\phi \in \text{Im} F_p^2(\rho) / (\text{Im} F_p^2(\rho) \cap \ker F_p^2(\rho));$$

$$\forall \rho \in \Sigma_2$$

Nelle ipotesi della proposizione 5 si possono fare esempi in cui (6) non vale e quindi non vale il Teorema 2, nei quali esistono curve integrali di H_p che hanno punti limite su Σ_2 . L'esempio riportato di seguito è dovuto a T. Nishitani.

Proposizione 6. [6]. Siano $q_i, i=0, \dots, p-1, r_i, i=1, \dots, p$ reali e positivi. Allora esiste una scelta di p numeri reali $\epsilon_i, i=1, \dots, p$ tali che, posto

$$p(x, \xi) = -\xi_0^2 + \sum_{i=0}^{p-1} q_i (x_i - x_{i+1})^2 \xi_n^2 + \sum_{i=1}^p r_i \xi_i^2 + \xi_n^{-1} \sum_{i=1}^p \epsilon_i \xi_i \xi_p^2,$$

si ha:

- i) p soddisfa le ipotesi TE), RI), R2) e II) della proposizione 5.
- ii) Esiste una curva bicaratteristica contenuta in Σ_1 che ha un punto limite in Σ_2 .

Osservazione. E' ovvio che un tale p non verifica la (6).

Un risultato generale è stato provato da T. Nishitani quando $\text{codim } \Sigma_2 = 3$.

Proposizione 7.[6]. Supponiamo che p verifichi TE), R1), R2), II) e che $\text{codim } \Sigma_2 = 3$. Allora condizione necessaria e sufficiente affinché non vi siano curve integrali di H_p contenute in Σ_1 con punti limite su Σ_2 è che valga la condizione (6).

La situazione in generale è un po' più complicata; in codimensione arbitraria di Σ_2 vale il risultato:

Proposizione 8.[1]. Supponiamo che p verifichi TE), R1), R2) e II. Supponiamo inoltre che $(H_S^3 p)(\rho) \neq 0$; $\rho \in \Sigma_2$. Allora esiste una bicaratteristica nulla di p che ha un punto limite su Σ_2 .

Tenendo conto della Proposizione 5 la Proposizione 8 si può anche riformulare:

Proposizione 8'.[1]. Supponiamo che p verifichi TE), R1), R2) e II e che valga la (6') ii). Allora sono equivalenti le affermazioni:

- i) p ammette una fattorizzazione del tipo (3)-(5);
- ii) non esistono bicaratteristiche nulle di p con punti limite su Σ_2 ;
- iii) vale (6') i).

Il comportamento delle bicaratteristiche "eccezionali" si può precisare:

Proposizione 8.[1]. Sia p come nella Proposizione 8. Sia $[0, +\infty[\ni s \rightarrow \gamma(s)$ una bicaratteristica nulla di p tale che $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = \bar{\rho} \in \Sigma_2$. Supponiamo che esista il $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} = v \in T_{-\rho}(T^* R^{n+1})$. Allora $v = \frac{H_{\Lambda}(\bar{\rho})}{|H_{\Lambda}(\bar{\rho})|}$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. BERNARDI, A. BOVE, Geometric results for a class of hyperbolic operators with double characteristics, in corso di stampa su Comm. P.D.E.
- [2] E. BERNARDI, A. BOVE, C. PARENTI, in preparazione.
- [3] L. HÖRMANDER, The analysis of linear partial differential operators III, Berlin, 1985.
- [4] V. Ja IVRII, WF of solutions of certain hyperbolic pseudodifferential equations, Trans. Moscow Math. Soc. 39 (1981), 87-119.
- [5] N. IWASAKI, The Cauchy problem for effectively hyperbolic equations (Remarks), Preprint R.I.M.S., 1984.
- [6] T. NISHITANI, Note on some non effectively hyperbolic operators, Science Reports, 32 (1983), 9-17.